Jądro Bergmana, jądro Szegő

Paweł Wójcicki

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej
Warszawa, Polska

19.11.2020

Abstrakt

Abstrakt

Geometryczna teoria funkcji jest gałęzią analizy zespolonej zajmującą się badaniem geometrycznych własności funkcji analitycznych.

Abstrakt

Geometryczna teoria funkcji jest gałęzią analizy zespolonej zajmującą się badaniem geometrycznych własności funkcji analitycznych. Jednym z podstawowych wyników tej dziedziny jest np. Twierdzenie Riemanna albo hipoteza Bieberbacha (rozwiązana w 1985 przez Louis de Branges).

Abstrakt

Geometryczna teoria funkcji jest gałęzią analizy zespolonej zajmującą się badaniem geometrycznych własności funkcji analitycznych. Jednym z podstawowych wyników tej dziedziny jest np. Twierdzenie Riemanna albo hipoteza Bieberbacha (rozwiązana w 1985 przez Louis de Branges). Na dzisiejszym seminarium przedstawimy bardzo ważne idee dotyczące metryk konforemnie (biholomorficznie) niezmienniczych.

Abstrakt

Geometryczna teoria funkcji jest gałęzią analizy zespolonej zajmującą się badaniem geometrycznych własności funkcji analitycznych. Jednym z podstawowych wyników tej dziedziny jest np. Twierdzenie Riemanna albo hipoteza Bieberbacha (rozwiązana w 1985 przez Louis de Branges). Na dzisiejszym seminarium przedstawimy bardzo ważne idee dotyczące metryk konforemnie (biholomorficznie) niezmienniczych. Pokażemy np., jak można wyrazić odwzorowanie konforemne z Twierdzenia Riemanna przy pomocy tzw. jądra Bergmana.

Abstrakt

Abstrakt

W drugiej części skupimy się bardziej na przypadku wielowymiarowym. Wprowadzimy nową metrykę, która daje ciekawe wnioski dotyczące tych znanych. Jest to efekt wspólnej pracy z prof. Steven Krantzem z WUSTL w Missouri ([KW]).

Metryka

Metryka

W klasycznej analizie, metryka jest standardowym narzędziem używanym do mierzenia odległości.

Metryka

W klasycznej analizie, metryka jest standardowym narzędziem używanym do mierzenia odległości.
Jeśli X jest zbiorem, to metryką d na X nazywamy funkcję $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ taką, że dla dowolnych $x, y, z \in X$:

Metryka

W klasycznej analizie, metryka jest standardowym narzędziem używanym do mierzenia odległości.
Jeśli X jest zbiorem, to metryką d na X nazywamy funkcję $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ taką, że dla dowolnych $x, y, z \in X$:

(1) $d(x, y) = d(y, x)$

(2) $d(x, y) \geq 0$ oraz $d(x, y) = 0$ wtedy, i tylko wtedy gdy $x = y$

(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Pewne problemy

Niestety, to pojęcie metryki nie wystarcza aby zastosować je do pewnych analitycznych problemów. Na przykład :

Pewne problemy

Niestety, to pojęcie metryki nie wystarcza aby zastosować je do pewnych analitycznych problemów. Na przykład :

- Ustalmy dwa punkty $P, Q \in X$. Możemy chcieć znaleźć "krzywą o najmniejszej długości" łączącą P oraz Q.

Pewne problemy

Niestety, to pojęcie metryki nie wystarcza aby zastosować je do pewnych analitycznych problemów. Na przykład :

- Ustalmy dwa punkty $P, Q \in X$. Możemy chcieć znaleźć "krzywą o najmniejszej długości" łączącą P oraz Q.To prowadzi do równania różniczkowego na geodezyjne.

Pewne problemy

Niestety, to pojęcie metryki nie wystarcza aby zastosować je do pewnych analitycznych problemów. Na przykład :

- Ustalmy dwa punkty $P, Q \in X$. Możemy chcieć znaleźć "krzywą o najmniejszej długości" łączącą P oraz Q.To prowadzi do równania różniczkowego na geodezyjne.
- Krzywizna - jest mierzona przy pomocy normalnego pola wektorowego. Musimy użyć rachunku różniczkowego !

Metryka w nowym sensie

Metryka w nowym sensie

Jeśli $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ jest obszarem (otwartym, spójnym zbiorem), to metryką na zbiorze Ω nazywamy funkcję ciągłą $\rho(z) \geq 0$ w Ω taką, że jest dwukrotnie różniczkowalna na $\{z \in \Omega : \rho(z) > 0\}$.

Metryka w nowym sensie

Jeśli $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ jest obszarem (otwartym, spójnym zbiorem), to metryką na zbiorze Ω nazywamy funkcję ciągłą $\rho(z) \geq 0$ w Ω taką, że jest dwukrotnie różniczkowalna na $\{z \in \Omega : \rho(z) > 0\}$. Jeśli $z \in \Omega$ oraz $\eta \in \mathbb{C}$ jest wektorem, to definiujemy **długość** η **w punkcie** z przez

$$|\eta|_{\rho,z} \equiv \rho(z)||\eta||$$

gdzie $||\eta||$ oznacza zwykłą długość Euklidesową wektora η.

Długość krzywej

Długość krzywej

Niech $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ będzie obszarem, ρ metryką na Ω.

Długość krzywej

Niech $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ będzie obszarem, ρ metryką na Ω. Jeśli

$$\gamma : [a, b] \to \Omega$$

jest krzywą różniczkowalną w sposób ciągły, możemy zdefiniować **długość** γ **w metryce** ρ przez

Długość krzywej

Niech $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ będzie obszarem, ρ metryką na Ω. Jeśli

$$\gamma : [a, b] \to \Omega$$

jest krzywą różniczkowalną w sposób ciągły, możemy zdefiniować **długość** γ **w metryce** ρ przez

$$\ell_\rho(\gamma) = \int_\gamma \rho(z)|dz|$$

Długość krzywej

Niech $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ będzie obszarem, ρ metryką na Ω. Jeśli

$$\gamma : [a, b] \to \Omega$$

jest krzywą różniczkowalną w sposób ciągły, możemy zdefiniować **długość** γ **w metryce** ρ przez

$$\ell_\rho(\gamma) = \int_\gamma \rho(z)|dz| = \ \{z = \gamma(s)\} =$$

Długość krzywej

Niech $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ będzie obszarem, ρ metryką na Ω. Jeśli

$$\gamma : [a, b] \to \Omega$$

jest krzywą różniczkowalną w sposób ciągły, możemy zdefiniować **długość** γ **w metryce** ρ przez

$$\ell_\rho(\gamma) = \int_\gamma \rho(z)|dz| = \{z = \gamma(s)\} = \int_a^b |\gamma'(s)|_{\rho,\gamma(s)} ds$$

ρ - metryczna odległość pomiędzy P oraz Q

ρ - metryczna odległość pomiędzy P oraz Q

Niech $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ będzie obszarem, $P, Q \in \Omega$, oraz ρ będzie metryką na Ω.

ρ - metryczna odległość pomiędzy P oraz Q

Niech $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ będzie obszarem, $P, Q \in \Omega$, oraz ρ będzie metryką na Ω.
Zdefiniujmy $C_\Omega(P,Q) = \{\gamma; \quad \gamma : [0,1] \to \Omega, \gamma(0) = P, \gamma(1) = Q,$
γ jest ciągłą, kawałkami różniczkowalną w sposób ciągły $\}$.

ρ - metryczna odległość pomiędzy P oraz Q

Niech $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ będzie obszarem, $P, Q \in \Omega$, oraz ρ będzie metryką na Ω.
Zdefiniujmy $C_\Omega(P,Q) = \{\gamma; \quad \gamma : [0,1] \to \Omega, \gamma(0) = P, \gamma(1) = Q,$
γ jest ciągłą, kawałkami różniczkowalną w sposób ciągły $\}$.
Definiujemy ρ - metryczną odległość pomiędzy P oraz Q przez :

$$d_\rho(P,Q) = \inf\{\ell_\rho(\gamma) : \gamma \in C_\Omega(P,Q)\}.$$

ρ - metryczna odległość pomiędzy P oraz Q

Niech $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ będzie obszarem, $P, Q \in \Omega$, oraz ρ będzie metryką na Ω.
Zdefiniujmy $C_\Omega(P, Q) = \{\gamma; \quad \gamma : [0, 1] \to \Omega, \gamma(0) = P, \gamma(1) = Q,$
γ jest ciągłą, kawałkami różniczkowalną w sposób ciągły $\}$.
Definiujemy ρ - metryczną odległość pomiędzy P oraz Q przez :

$$d_\rho(P, Q) = \inf\{\ell_\rho(\gamma) : \gamma \in C_\Omega(P, Q)\}.$$

(*) d_ρ spełnia klasyczne warunki bycia metryką w zwykłym sensie !

(*) d_ρ spełnia klasyczne warunki bycia metryką w zwykłym sensie !

(**) Najkrótsza krzywa γ łącząca P oraz Q nie musi być zawarta w Ω, lecz w naszej definicji bierzemy infimum !

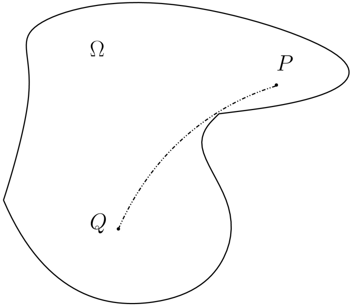
(*) d_ρ spełnia klasyczne warunki bycia metryką w zwykłym sensie !

(**) Najkrótsza krzywa γ łącząca P oraz Q nie musi być zawarta w Ω, lecz w naszej definicji bierzemy infimum !

(***) Jeśli $\rho(z) \equiv 1$ oraz $\Omega = \mathbb{C}$ to $d_1(P, Q) = ||PQ||$ jest zwykłą Euklidesową odległością pomiędzy P i Q. Wtedy najkrótszą krzywą jest linia prosta !

Krzywa o najkrótszej długości nie musi być zawarta w Ω !

Krzywa o najkrótszej długości nie musi być zawarta w Ω !



Metryka Poincaré

Metryka Poincaré

Biorąc

$$\rho(z) = \frac{1}{1 - ||z||^2}$$

Henri Poincaré (29.04.1854 – 17.07.1912) otrzymał metrykę (nazywaną *metryką Poincaré*) dla koła jednostkowego $D(0, 1) \subset \mathbb{C}$.

Metryka Poincaré

Biorąc

$$\rho(z) = \frac{1}{1 - ||z||^2}$$

Henri Poincaré (29.04.1854 – 17.07.1912) otrzymał metrykę (nazywaną *metryką Poincaré*) dla koła jednostkowego $D(0,1) \subset \mathbb{C}$.

Ta metryka definiuje konforemnie niezmienniczą odległość d_ρ

Odwzorowania konforemne

Odwzorowania konforemne

Niech $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ będzie obszarem. Funkcję

$$f : \Omega \to \mathbb{C}$$

nazywamy **konforemną** na D, gdy

Odwzorowania konforemne

Niech $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ będzie obszarem. Funkcję

$$f : \Omega \to \mathbb{C}$$

nazywamy **konforemną** na D, gdy

(*) $f \in Hol(\Omega)$

Odwzorowania konforemne

Niech $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ będzie obszarem. Funkcję

$$f : \Omega \to \mathbb{C}$$

nazywamy **konforemną** na D, gdy

(*) $f \in Hol(\Omega)$

(**) $f'(z) \neq 0$

Odwzorowania konforemne

Niech $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ będzie obszarem. Funkcję

$$f : \Omega \to \mathbb{C}$$

nazywamy **konforemną** na D, gdy

(*) $f \in Hol(\Omega)$

(**) $f'(z) \neq 0$

Wtedy f jest $1-1$ (f jest injekcją).

Metryka Poincaré

Metryka Poincaré

Niech $D(0,1) \subset \mathbb{C}$ będzie kołem jednostkowym, $f : D(0,1) \to D(0,1)$ będzie odwzorowaniem konformenym, oraz $\rho(z) = \frac{1}{1-||z||^2}$ odległością Poincaré na $D(0,1)$.

Metryka Poincaré

Niech $D(0,1) \subset \mathbb{C}$ będzie kołem jednostkowym, $f : D(0,1) \to D(0,1)$ będzie odwzorowaniem konformenym, oraz $\rho(z) = \frac{1}{1-||z||^2}$ odległością Poincaré na $D(0,1)$. Wtedy dla dowolnych $P, Q \in D(0,1)$ mamy, że

$$d_\rho(P,Q) = d_\rho(f(P), f(Q))$$

Metryka Poincaré

Niech $D(0,1) \subset \mathbb{C}$ będzie kołem jednostkowym, $f : D(0,1) \to D(0,1)$ będzie odwzorowaniem konformenym, oraz $\rho(z) = \frac{1}{1-||z||^2}$ odległością Poincaré na $D(0,1)$. Wtedy dla dowolnych $P, Q \in D(0,1)$ mamy, że

$$d_\rho(P,Q) = d_\rho(f(P), f(Q))$$

co oznacza, że **odległość Poincaré jest konformenie niezmiennicza**.

Odległość Euklidesowa nie jest konforemnie niezmiennicza !

Rozważmy

$$f(z) = (z+4)^4, \quad z \in D(0,2)$$

Wtedy

$$1 - 0 = 1 \neq f(1) - f(0) = 369.$$

Odległość Poincaré na $D(0, 1) \subset \mathbb{C}$

Odległość Poincaré na $D(0,1) \subset \mathbb{C}$

Jeśli $P, Q \in D(0,1)$, to odległość Poincaré na $D(0,1)$ jest dana przez

$$d_\rho(P,Q) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \| \frac{P-Q}{1-\overline{P}Q} \|}{1 - \| \frac{P-Q}{1-\overline{P}Q} \|} \right).$$

Odległość Poincaré na $D(0,1) \subset \mathbb{C}$

Jeśli $P, Q \in D(0,1)$, to odległość Poincaré na $D(0,1)$ jest dana przez

$$d_\rho(P,Q) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + \|\frac{P-Q}{1-\overline{P}Q}\|}{1 - \|\frac{P-Q}{1-\overline{P}Q}\|}\right).$$

Szkic dowodu.

Rozważmy wpierw przypadek $P = 0$ oraz $Q \in D(0,1)$.

Odległość Poincaré na $D(0,1) \subset \mathbb{C}$

Jeśli $P, Q \in D(0,1)$, to odległość Poincaré na $D(0,1)$ jest dana przez

$$d_\rho(P,Q) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + \|\frac{P-Q}{1-\overline{P}Q}\|}{1 - \|\frac{P-Q}{1-\overline{P}Q}\|}\right).$$

Szkic dowodu.

Rozważmy wpierw przypadek $P = 0$ oraz $Q \in D(0,1)$. Z niezmienniczości ze względu na obroty (rotacja jest odwzorowaniem konforemnym) możemy założyć, że $Q = (1-\epsilon, 0)$.

Odległość Poincaré na $D(0,1) \subset \mathbb{C}$

Jeśli $P, Q \in D(0,1)$, to odległość Poincaré na $D(0,1)$ jest dana przez

$$d_\rho(P,Q) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \|\frac{P-Q}{1-\overline{P}Q}\|}{1 - \|\frac{P-Q}{1-\overline{P}Q}\|} \right).$$

Szkic dowodu.

Rozważmy wpierw przypadek $P = 0$ oraz $Q \in D(0,1)$. Z niezmienniczości ze względu na obroty (rotacja jest odwzorowaniem konforemnym) możemy założyć, że $Q = (1-\epsilon, 0)$.Bez utraty ogólności możemy skupić się tylko na krzywych postaci $\gamma(t) = (t, g(t))$ dla $t \in [0, 1-\epsilon]$.

Odległość Poincaré na $D(0,1) \subset \mathbb{C}$

Jeśli $P, Q \in D(0,1)$, to odległość Poincaré na $D(0,1)$ jest dana przez

$$d_\rho(P,Q) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + \|\frac{P-Q}{1-\overline{P}Q}\|}{1 - \|\frac{P-Q}{1-\overline{P}Q}\|}\right).$$

Szkic dowodu.

Rozważmy wpierw przypadek $P = 0$ oraz $Q \in D(0,1)$. Z niezmienniczości ze względu na obroty (rotacja jest odwzorowaniem konforemnym) możemy założyć, że $Q = (1-\epsilon, 0)$.Bez utraty ogólności możemy skupić się tylko na krzywych postaci $\gamma(t) = (t, g(t))$ dla $t \in [0, 1-\epsilon]$. Wtedy

$$\ell(\gamma) = \int_0^{1-\epsilon} \frac{\|\gamma'(t)\|}{1 - \|\gamma'(t)\|^2} dt$$

Odległość Poincaré na $D(0,1) \subset \mathbb{C}$

Jeśli $P, Q \in D(0,1)$, to odległość Poincaré na $D(0,1)$ jest dana przez

$$d_\rho(P,Q) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \| \frac{P-Q}{1-\overline{P}Q} \|}{1 - \| \frac{P-Q}{1-\overline{P}Q} \|} \right).$$

Szkic dowodu.

Rozważmy wpierw przypadek $P = 0$ oraz $Q \in D(0,1)$. Z niezmienniczości ze względu na obroty (rotacja jest odwzorowaniem konforemnym) możemy założyć, że $Q = (1-\epsilon, 0)$.Bez utraty ogólności możemy skupić się tylko na krzywych postaci $\gamma(t) = (t, g(t))$ dla $t \in [0, 1-\epsilon]$. Wtedy

$$\ell(\gamma) = \int_0^{1-\epsilon} \frac{\|\gamma'(t)\|}{1 - \|\gamma'(t)\|^2} dt \geq \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2-\epsilon}{\epsilon} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+|Q|}{1-|Q|} \right).$$

Odległość Poincaré na $D(0,1) \subset \mathbb{C}$

Jeśli $P, Q \in D(0,1)$, to odległość Poincaré na $D(0,1)$ jest dana przez

$$d_\rho(P,Q) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\|\frac{P-Q}{1-\overline{P}Q}\|}{1-\|\frac{P-Q}{1-\overline{P}Q}\|}\right).$$

Szkic dowodu.

Rozważmy wpierw przypadek $P = 0$ oraz $Q \in D(0,1)$. Z niezmienniczości ze względu na obroty (rotacja jest odwzorowaniem konforemnym) możemy założyć, że $Q = (1-\epsilon, 0)$.Bez utraty ogólności możemy skupić się tylko na krzywych postaci $\gamma(t) = (t, g(t))$ dla $t \in [0, 1-\epsilon]$. Wtedy

$$\ell(\gamma) = \int_0^{1-\epsilon} \frac{\|\gamma'(t)\|}{1-\|\gamma'(t)\|^2}dt \geq \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2-\epsilon}{\epsilon}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+|Q|}{1-|Q|}\right).$$

Jeśli $P, Q \in D(0,1)$, możemy użyć transformacji Möbiusa $\varphi(z) = \frac{z-P}{1-\overline{P}z}$ $(\varphi(P) = 0)$ aby otrzymać poprzedni przypadek - używając konforemnej niezmienniczości d_ρ.

Odległość Poincaré na $D(0,1) \subset \mathbb{C}$

Jeśli $P, Q \in D(0,1)$, to odległość Poincaré na $D(0,1)$ jest dana przez

$$d_\rho(P,Q) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \|\frac{P-Q}{1-\overline{P}Q}\|}{1 - \|\frac{P-Q}{1-\overline{P}Q}\|} \right).$$

Szkic dowodu.

Rozważmy wpierw przypadek $P = 0$ oraz $Q \in D(0,1)$. Z niezmienniczości ze względu na obroty (rotacja jest odwzorowaniem konforemnym) możemy założyć, że $Q = (1-\epsilon, 0)$.Bez utraty ogólności możemy skupić się tylko na krzywych postaci $\gamma(t) = (t, g(t))$ dla $t \in [0, 1-\epsilon]$. Wtedy

$$\ell(\gamma) = \int_0^{1-\epsilon} \frac{\|\gamma'(t)\|}{1 - \|\gamma'(t)\|^2} dt \geq \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2-\epsilon}{\epsilon} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+|Q|}{1-|Q|} \right).$$

Jeśli $P, Q \in D(0,1)$, możemy użyć transformacji Möbiusa $\varphi(z) = \frac{z-P}{1-\overline{P}z}$ $(\varphi(P) = 0)$ aby otrzymać poprzedni przypadek - używając konforemnej niezmienniczości d_ρ. □

$(D(0,1), \rho(z))$ jest zupełną przestrzenią metryczną !

$(D(0,1), \rho(z))$ jest zupełną przestrzenią metryczną !

Co więcej, dysk jednostkowy $D(0,1) \subset \mathbb{C}$, razem z metryką Poincaré, jest zupełną przestrzenią metryczną !

Stefan Bergman (05.05.1895 – 06.06.1977 (82)) i jego metryka

Stefan Bergman (05.05.1895 – 06.06.1977 (82)) i jego metryka

Stefan Bergman był urodzonym w Polsce (w Częstochowie) amerykańskim matematykiem, zajmującym się analizą zespoloną.

Stefan Bergman (05.05.1895 – 06.06.1977 (82)) i jego metryka

Stefan Bergman był urodzonym w Polsce (w Częstochowie) amerykańskim matematykiem, zajmującym się analizą zespoloną. **Odkrył tzw. jądro Bergmana i metrykę Bergmana** które grają ogromnie ważną rolę w analizie zespolonej (i nie tylko !).

Co to jest przestrzeń Bergmana ?

Co to jest przestrzeń Bergmana ?

Dla danego obszaru $\Omega \subset \mathbb{C}$ rozważmy :

$$L^2Hol(\Omega) = \{f \in Hol(\Omega); ||f||^2_\Omega = \int_\Omega |f|^2 dV < \infty\}$$

z iloczynem skalarnym $(f,g) = \int_\Omega f\bar{g}dV$.

Co to jest przestrzeń Bergmana ?

Dla danego obszaru $\Omega \subset \mathbb{C}$ rozważmy :

$$L^2 Hol(\Omega) = \{f \in Hol(\Omega); ||f||^2_\Omega = \int_\Omega |f|^2 dV < \infty\}$$

z iloczynem skalarnym $(f, g) = \int_\Omega f\bar{g}dV$. To jest przestrzeń Hilberta, nazywana **przestrzenią Bergmana**.

Skąd się bierze jądro Bergmana ?

Skąd się bierze jądro Bergmana ?

Niech $w \in \Omega$. Zminimalizujmy normę $||f||_\Omega$ w klasie $E_w = \{f \in L^2 Hol(\Omega); f(w) = 1\}$.

Skąd się bierze jądro Bergmana ?

Niech $w \in \Omega$. Zminimalizujmy normę $||f||_\Omega$ w klasie $E_w = \{f \in L^2 Hol(\Omega); f(w) = 1\}$. Ponieważ E_t jest wypukłym i domkniętym podzbiorem $L^2_H(\Omega, \mu)$, to istnieje dokładnie jedna funkcją będąca rozwiązaniem tego problemu.

Skąd się bierze jądro Bergmana ?

Niech $w \in \Omega$. Zminimalizujmy normę $||f||_\Omega$ w klasie $E_w = \{f \in L^2 Hol(\Omega); f(w) = 1\}$. Ponieważ E_t jest wypukłym i domkniętym podzbiorem $L^2_H(\Omega, \mu)$, to istnieje dokładnie jedna funkcją będąca rozwiązaniem tego problemu. Oznaczmy ją przez $\phi(z, w)$.

Skąd się bierze jądro Bergmana ?

Niech $w \in \Omega$. Zminimalizujmy normę $||f||_\Omega$ w klasie $E_w = \{f \in L^2 Hol(\Omega); f(w) = 1\}$. Ponieważ E_t jest wypukłym i domkniętym podzbiorem $L^2_H(\Omega, \mu)$, to istnieje dokładnie jedna funkcją będąca rozwiązaniem tego problemu. Oznaczmy ją przez $\phi(z, w)$. **Funkcja jądrowa Bergmana** K_Ω jest zdefiniowana przez :

$$K_\Omega(z, w) = \frac{\phi(z, w)}{||\phi||^2_\Omega}$$

Skąd się bierze jądro Bergmana ?

Niech $w \in \Omega$. Zminimalizujmy normę $||f||_\Omega$ w klasie $E_w = \{f \in L^2 Hol(\Omega); f(w) = 1\}$. Ponieważ E_t jest wypukłym i domkniętym podzbiorem $L^2_H(\Omega, \mu)$, to istnieje dokładnie jedna funkcją będąca rozwiązaniem tego problemu. Oznaczmy ją przez $\phi(z, w)$. **Funkcja jądrowa Bergmana** K_Ω jest zdefiniowana przez :

$$K_\Omega(z, w) = \frac{\phi(z, w)}{||\phi||^2_\Omega}$$

Przypomnijmy, że $w \in \Omega$ jest ustalone.

Obliczenie jądra Bergmana

Jeśli $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ jest układem ortonormalnym zupełnym na $\Omega \subset \mathbb{C}$, to

$$K_\Omega(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(z)\overline{\varphi_k(t)}$$

Obliczenie jądra Bergmana

Jeśli $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ jest układem ortonormalnym zupełnym na $\Omega \subset \mathbb{C}$, to

$$K_\Omega(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(z)\overline{\varphi_k(t)}$$

Więc dla $\Omega = D(0,1)$, możemy wziąć $\varphi_k = \lambda_k z^k$ (z rozwinięcia Taylora funkcji holomorficznej).

Obliczenie jądra Bergmana

Jeśli $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ jest układem ortonormalnym zupełnym na $\Omega \subset \mathbb{C}$, to

$$K_\Omega(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(z)\overline{\varphi_k(t)}$$

Więc dla $\Omega = D(0,1)$, możemy wziąć $\varphi_k = \lambda_k z^k$ (z rozwinięcia Taylora funkcji holomorficznej). Ortonormalność oznacza $(\varphi_k, \varphi_l) = 0$ dla $k \neq l$ oraz $(\varphi_k, \varphi_k) = 1$ dla $\lambda_k = \sqrt{(k+1)/\pi}$.

Obliczenie jądra Bergmana

Jeśli $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ jest układem ortonormalnym zupełnym na $\Omega \subset \mathbb{C}$, to

$$K_\Omega(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(z)\overline{\varphi_k(t)}$$

Więc dla $\Omega = D(0,1)$, możemy wziąć $\varphi_k = \lambda_k z^k$ (z rozwinięcia Taylora funkcji holomorficznej). Ortonormalność oznacza $(\varphi_k, \varphi_l) = 0$ dla $k \neq l$ oraz $(\varphi_k, \varphi_k) = 1$ dla $\lambda_k = \sqrt{(k+1)/\pi}$. Zatem

$$K_{D(0,1)}(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k z^k \lambda_k \overline{w}^k = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(z\overline{w})^k$$

Obliczenie jądra Bergmana

Jeśli $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ jest układem ortonormalnym zupełnym na $\Omega \subset \mathbb{C}$, to

$$K_\Omega(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(z)\overline{\varphi_k(t)}$$

Więc dla $\Omega = D(0,1)$, możemy wziąć $\varphi_k = \lambda_k z^k$ (z rozwinięcia Taylora funkcji holomorficznej). Ortonormalność oznacza $(\varphi_k, \varphi_l) = 0$ dla $k \neq l$ oraz $(\varphi_k, \varphi_k) = 1$ dla $\lambda_k = \sqrt{(k+1)/\pi}$. Zatem

$$\begin{aligned} K_{D(0,1)}(z,t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k z^k \lambda_k \overline{w}^k = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(z\overline{w})^k \\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)q^k = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(q^{k+1})' \end{aligned}$$

Obliczenie jądra Bergmana

Jeśli $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ jest układem ortonormalnym zupełnym na $\Omega \subset \mathbb{C}$, to

$$K_\Omega(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(z)\overline{\varphi_k(t)}$$

Więc dla $\Omega = D(0,1)$, możemy wziąć $\varphi_k = \lambda_k z^k$ (z rozwinięcia Taylora funkcji holomorficznej). Ortonormalność oznacza $(\varphi_k, \varphi_l) = 0$ dla $k \neq l$ oraz $(\varphi_k, \varphi_k) = 1$ dla $\lambda_k = \sqrt{(k+1)/\pi}$. Zatem

$$\begin{aligned} K_{D(0,1)}(z,t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k z^k \lambda_k \overline{w}^k = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(z\overline{w})^k \\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)q^k = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(q^{k+1})' \\ &= \frac{1}{\pi}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} q^{k+1}\Big)' = \frac{1}{\pi}\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{\pi(1-z\overline{w})^2} \end{aligned}$$

Metryka Bergmana

Metryka Bergmana

Dla domkniętego obszaru $\Omega \subset \mathbb{C}$ definiujemy metrykę na Ω przez

$$g(z) = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} \ln K_\Omega(z,z), \ \ z \in \Omega.$$

Metryka Bergmana

Dla domkniętego obszaru $\Omega \subset \mathbb{C}$ definiujemy metrykę na Ω przez

$$g(z) = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} \ln K_\Omega(z, z), \;\; z \in \Omega.$$

To znaczy, że długość wektora stycznego ξ w punkcie $z \in \Omega$ jest dana przez

$$|\xi|_z = g(z) \|\xi\|.$$

Metryka Bergmana

Dla domkniętego obszaru $\Omega \subset \mathbb{C}$ definiujemy metrykę na Ω przez

$$g(z) = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} \ln K_\Omega(z, z), \;\; z \in \Omega.$$

To znaczy, że długość wektora stycznego ξ w punkcie $z \in \Omega$ jest dana przez

$$|\xi|_z = g(z)||\xi||.$$

$g(z)$ jest nazywane **metryką Bergmana !**

Metryka Bergmana

Dla domkniętego obszaru $\Omega \subset \mathbb{C}$ definiujemy metrykę na Ω przez

$$g(z) = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} \ln K_\Omega(z, z), \ z \in \Omega.$$

To znaczy, że długość wektora stycznego ξ w punkcie $z \in \Omega$ jest dana przez

$$|\xi|_z = g(z)||\xi||.$$

$g(z)$ jest nazywane **metryką Bergmana !**

Dla dysku jednostkowego $D(0, 1)$ otrzymujemy, że

$$g(z) = \frac{2}{(1 - |z|^2)^2}$$

(metryka Poincaré).

Metryka Bergmana jest konformenie niezmiennicza !

Metryka Bergmana jest konformenie niezmiennicza !

Niech $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ będą obszarami ograniczonymi, i niech $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ będzie odwzorowaniem konforemnym.

Metryka Bergmana jest konformenie niezmiennicza !

Niech $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ będą obszarami ograniczonymi, i niech $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ będzie odwzorowaniem konforemnym. Wtedy

$$d_{\Omega_1}(P, Q) = d_{\Omega_2}(f(P), f(Q)),$$

co znaczy, że **metryka Bergmana indukuje konforemnie niezmienniczą odległość. Jest to uogólnienie metryki Poincaré na dowolny obszar w** $\mathbb{C}^n$ **!**.

Zastosowania !

Zastosowania !

Przypomnijmy Twierdzenie Riemanna

Twierdzenie

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem jednospójnym, różnym od całej płaszczyzny. Wówczas dla każdego $t \in \Omega$ istnieje dokładnie jedno konformene odwzorowanie $\varphi : \Omega \to B(0,1)$ takie, że $\varphi(t) = 0$ oraz $\varphi'(t) > 0$.

Zastosowania !

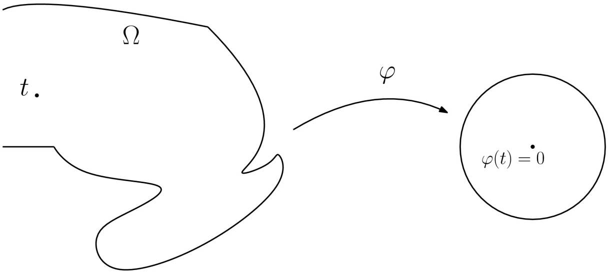
Zastosowania !

Przypomnijmy Twierdzenie Riemanna

Twierdzenie

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem jednospójnym, różnym od całej płaszczyzny. Wówczas dla każdego $t \in \Omega$ istnieje dokładnie jedno biholomorficzne (konforemne) odwzorowanie $\varphi : \Omega \to D(0,1)$ takie, że $\varphi(t) = 0$ oraz $\varphi'(t) > 0$.

Zastosowania !



Zastosowania !

Spróbujmy dostać jawny wzór na φ !

Zastosowania !

Zastosowania !

Jądra Bergmana obszarów Ω oraz $D(0,1)$ są połączone wzorem :

$$K_{\Omega}(z,w) = K_{D(0,1)}(\varphi(z),\varphi(w))\varphi'(z)\overline{\varphi'(w)}$$

Zastosowania !

Jądra Bergmana obszarów Ω oraz $D(0,1)$ są połączone wzorem :

$$K_\Omega(z,w) = K_{D(0,1)}(\varphi(z),\varphi(w))\varphi'(z)\overline{\varphi'(w)}$$

Lecz

$$K_{D(0,1)}(a,b) = \frac{1}{\pi(1-a\bar{b})^2}$$

Zatem

$$K_\Omega(z,t) = \frac{1}{\pi}\varphi'(z)\varphi'(t).$$

Zastosowania !

Jądra Bergmana obszarów Ω oraz $D(0,1)$ są połączone wzorem :

$$K_\Omega(z,w) = K_{D(0,1)}(\varphi(z),\varphi(w))\varphi'(z)\overline{\varphi'(w)}$$

Lecz

$$K_{D(0,1)}(a,b) = \frac{1}{\pi(1-a\bar{b})^2}$$

Zatem

$$K_\Omega(z,t) = \frac{1}{\pi}\varphi'(z)\varphi'(t).$$

Zatem

$$K_\Omega(t,t) = \frac{1}{\pi}\varphi'(t)^2$$

Zastosowania !

Zastosowania !

A więc

$$\varphi'(z) = \frac{\pi K_\Omega(z,t)}{\sqrt{\pi K_\Omega(t,t)}} = \sqrt{\frac{\pi}{K_\Omega(t,t)}} K_\Omega(z,t)$$

i ostatecznie

$$\varphi(z) = \sqrt{\frac{\pi}{K_\Omega(t,t)}} \int_t^z K_\Omega(z,t)dz$$

Zastosowania !

Zastosowania !

W roku 1907 H. Poincaré udowodnił

Twierdzenie

Dla $N \geq 2$ nie istnieje biholomorficzne odwzorowanie kuli $B(0,1) \subset \mathbb{C}^2$ w polidysk $D(0,1) \times D(0,1)$.

Zastosowania !

W roku 1907 H. Poincaré udowodnił

Twierdzenie

Dla $N \geq 2$ nie istnieje biholomorficzne odwzorowanie kuli $B(0,1) \subset \mathbb{C}^2$ w polidysk $D(0,1) \times D(0,1)$.

Powższe twierdzenie da się udowodnić na wiele sposobów. Jednym z nich jest użycie metryki Bergmana (konforemnie niezmienniczej). Nie zachodzi równość metryk !!!

Ciekawostka

Ciekawostka

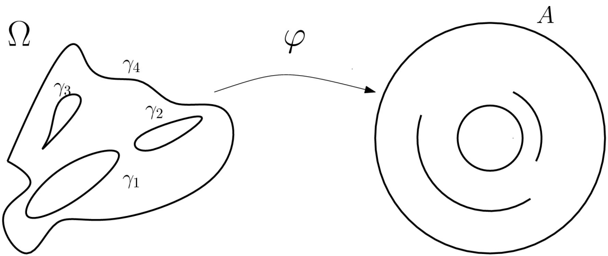
Zachodzi następujące

Twierdzenie

Niech $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ będzie $k-$spójnym obszarem, $k \geq 2$, i niech żadna składowa dopełnienia $\mathbb{C} \setminus \Omega$ nie będzie punktem. Wtedy istnieje konforemne odzworowanie $\varphi : \Omega \to A$, gdzie A jest pierścieniem $A = \{\eta \in \mathbb{C}, c < |\eta| < C\}$ z wyrzuconymi $k-2$ łukami, leżącymi na okręgach $|\eta| = c_1, |\eta| = c_2, \ldots, |\eta| = c_{k-2}$.

Ciekawostka

Ciekawostka



Maciej Skwarczyński (11.04.1944 – 16.12.2011(67)) i jego metryka

Maciej Skwarczyński (11.04.1944 – 16.12.2011(67)) i jego metryka

W roku 1969 prof. Maciej Skwarczyński zdefiniował nową metrykę przy pomocy jądra Bergmana rozważanego zbioru.

Maciej Skwarczyński (11.04.1944 – 16.12.2011(67)) i jego metryka

W roku 1969 prof. Maciej Skwarczyński zdefiniował nową metrykę przy pomocy jądra Bergmana rozważanego zbioru. Maciej Skwarczyński studiował w latach 1966 – 1968 w Leland Stanford University, USA u Stefana Bergmana

Maciej Skwarczyński i jego metryka

Maciej Skwarczyński i jego metryka

Dla obszaru $\Omega \subset \mathbb{C}$ definiujemy

$$\varrho_\Omega(p,q) = \left(1 - \frac{|K_{D,\mu}(p,q)|}{\sqrt{K_{D,\mu}(p,p)}\sqrt{K_{D,\mu}(q,q)}}\right)^{1/2}$$

Maciej Skwarczyński i jego metryka

Dla obszaru $\Omega \subset \mathbb{C}$ definiujemy

$$\varrho_\Omega(p,q) = \left(1 - \frac{|K_{D,\mu}(p,q)|}{\sqrt{K_{D,\mu}(p,p)}\sqrt{K_{D,\mu}(q,q)}}\right)^{1/2}$$

Okazuje się, że **ta metryka jest konforemnie niezmiennicza** podobnie jak metryki Bergmana i Poincaré :

Maciej Skwarczyński i jego metryka

Dla obszaru $\Omega \subset \mathbb{C}$ definiujemy

$$\varrho_\Omega(p,q) = \left(1 - \frac{|K_{D,\mu}(p,q)|}{\sqrt{K_{D,\mu}(p,p)}\sqrt{K_{D,\mu}(q,q)}}\right)^{1/2}$$

Okazuje się, że **ta metryka jest konforemnie niezmiennicza** podobnie jak metryki Bergmana i Poincaré :

Niech $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ będą ograniczonymi zbiorami i niech $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ będzie konformene.

Maciej Skwarczyński i jego metryka

Dla obszaru $\Omega \subset \mathbb{C}$ definiujemy

$$\varrho_\Omega(p,q) = \left(1 - \frac{|K_{D,\mu}(p,q)|}{\sqrt{K_{D,\mu}(p,p)}\sqrt{K_{D,\mu}(q,q)}}\right)^{1/2}$$

Okazuje się, że **ta metryka jest konforemnie niezmiennicza** podobnie jak metryki Bergmana i Poincaré :

Niech $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ będą ograniczonymi zbiorami i niech $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ będzie konformene. Wtedy

$$\varrho_{\Omega_1}(p,q) = \varrho_{\Omega_2}(f(p), f(q)).$$

Maciej Skwarczyński i jego metryka

Dla obszaru $\Omega \subset \mathbb{C}$ definiujemy

$$\varrho_\Omega(p,q) = \left(1 - \frac{|K_{D,\mu}(p,q)|}{\sqrt{K_{D,\mu}(p,p)}\sqrt{K_{D,\mu}(q,q)}}\right)^{1/2}$$

Okazuje się, że **ta metryka jest konforemnie niezmiennicza** podobnie jak metryki Bergmana i Poincaré :

Niech $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ będą ograniczonymi zbiorami i niech $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ będzie konformene. Wtedy

$$\varrho_{\Omega_1}(p,q) = \varrho_{\Omega_2}(f(p), f(q)).$$

Jeżeli $\Omega = D(0,1)$, to

$$\varrho_{D(0,1)} = \left|\frac{p-q}{1-p\overline{q}}\right|.$$

Przypadek wielowymiarowy. Holomorficzność funkcji wielu zmiennych

Definicja

Rozważmy funkcję wielu zmiennych $f : D \to \mathbb{C}$, gdzie $D \subset \mathbb{C}^n$. Punkt $z = (z_1, \dots, z_n) \in D$ utożsamiamy z punktem $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$. Funkcję f nazywamy *holomorficzną* na zbiorze D, jeśli w każdym punkcie tego zbioru istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y_i}$ oraz

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + i\frac{\partial f}{\partial y_i}\right) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

(mamy $2n$ równań rzeczywistych względem dwóch funkcji rzeczywistych $u = ref, v = imf$).

Przypadek wielowymiarowy. Holomorficzność funkcji wielu zmiennych

Definicja

Rozważmy funkcję wielu zmiennych $f : D \to \mathbb{C}$, gdzie $D \subset \mathbb{C}^n$. Punkt $z = (z_1, \dots, z_n) \in D$ utożsamiamy z punktem $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$. Funkcję f nazywamy *holomorficzną* na zbiorze D, jeśli w każdym punkcie tego zbioru istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y_i}$ oraz

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + i\frac{\partial f}{\partial y_i}\right) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

(mamy $2n$ równań rzeczywistych względem dwóch funkcji rzeczywistych $u = ref, v = imf$).

Powyższa definicja to tak naprawdę tzw. Twierdzenie Hartogsa.

Gábor Szegő (20.01.1895 – 7.08.1985(90))

Gábor Szegő (20.01.1895 – 7.08.1985(90))

W dwudziestym wieku węgiersko-amerykański matematyk wprowadził przestrzeń Szegő oraz metrykę Szegő.

Przestrzeń Szegő, Jądro Szegő

Niech $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ będzie zbiorem otwartym i spójnym (obszarem) z brzegiem klasy C^2. Niech $A(\Omega)$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych na $\overline{\Omega}$ i holomorficznych na Ω. Utożsamiamy takie funkcje z ich śladami na brzegu.

Przestrzeń Szegő, Jądro Szegő

Niech $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ będzie zbiorem otwartym i spójnym (obszarem) z brzegiem klasy C^2. Niech $A(\Omega)$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych na $\overline{\Omega}$ i holomorficznych na Ω. Utożsamiamy takie funkcje z ich śladami na brzegu. Ma to oczywiście sens, bo jak wiemy

Twierdzenie (Rozwiązanie problemu Dirichleta)

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem z brzegiem kl. C^1. Wtedy dla każdej funkcji ciągłej f na $\partial\Omega$, istnieje jednoznaczne $F \in C(\overline{\Omega})$ takie, że $F_{|\partial\Omega} = f$, oraz F jest harmoniczna na Ω.

Przestrzeń Szegő, Jądro Szegő

Niech $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ będzie zbiorem otwartym i spójnym (obszarem) z brzegiem klasy C^2. Niech $A(\Omega)$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych na $\overline{\Omega}$ i holomorficznych na Ω. Utożsamiamy takie funkcje z ich śladami na brzegu. Ma to oczywiście sens, bo jak wiemy

Twierdzenie (Rozwiązanie problemu Dirichleta)

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem z brzegiem kl. C^1. Wtedy dla każdej funkcji ciągłej f na $\partial\Omega$, istnieje jednoznaczne $F \in C(\overline{\Omega})$ takie, że $F_{|\partial\Omega} = f$, oraz F jest harmoniczna na Ω.

Oznaczmy przez $H^2_E(\partial\Omega)$ przestrzeń, która jest dokmknięciem w topologii $L^2(\partial\Omega, d\sigma)$ śladów funkcji z $A(\Omega)$ do $\partial\Omega$ (miara $d\sigma$ to zwykła $(2n-1$ wymiarowa) miara na $\partial\Omega$).

Przestrzeń Szegő, Jądro Szegő

Każda funkcja z przestrzeni $H^2(\partial\Omega)$ ma jednoznaczne holomorficzne rozszerzenie na Ω dane przez tzw. całkę Poissona, tj.

$$Pf(z) = \int_{\partial\Omega} P(x,y)f(y)d\sigma, \quad z \in \Omega$$

gdzie $P(x,y) = -\nabla G(x,y) \circ n_y(x,y)$ gdzie $x \in \Omega, y \in \partial\Omega$, oraz $n_y(x,y)$ to pole jednostkowe styczne do brzegu Ω (zaczepione w $y \in \partial\Omega$) skierowane na zewnątrz.

Przestrzeń Szegő, Jądro Szegő

Każda funkcja z przestrzeni $H^2(\partial\Omega)$ ma jednoznaczne holomorficzne rozszerzenie na Ω dane przez tzw. całkę Poissona, tj.

$$Pf(z) = \int_{\partial\Omega} P(x,y)f(y)d\sigma, \quad z \in \Omega$$

gdzie $P(x,y) = -\nabla G(x,y) \circ n_y(x,y)$ gdzie $x \in \Omega, y \in \partial\Omega$, oraz $n_y(x,y)$ to pole jednostkowe styczne do brzegu Ω (zaczepione w $y \in \partial\Omega$) skierowane na zewnątrz. Co więcej

$$\lim_{\epsilon \to 0} Pf(\xi - \epsilon n_\xi) = f(\xi)$$

dla prawie wszystkich $\xi \in \partial\Omega$. Zatem $H^2_E(\partial\Omega)$ jest domkniętą, właściwą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta $L^2(\partial\Omega,\, d\sigma_E)$.

Przestrzeń Szegő, Jądro Szegő

Z drugiej strony da się pokazać, że funkcjonał liniowy

$$E_z : f \to Pf(z), \quad f \in H^2(\partial\Omega)$$

jest ograniczony, więc ciągły. Z twierdzenia Riesza o reprezentacji funkcjonałów liniowych i ograniczonych mamy, że istnieje reprezentant $e_z \in H^2(\partial\Omega)$ funkcjonału E_z.

Przestrzeń Szegő, Jądro Szegő

Z drugiej strony da się pokazać, że funkcjonał liniowy

$$E_z : f \to Pf(z), \quad f \in H^2(\partial\Omega)$$

jest ograniczony, więc ciągły. Z twierdzenia Riesza o reprezentacji funkcjonałów liniowych i ograniczonych mamy, że istnieje reprezentant $e_z \in H^2(\partial\Omega)$ funkcjonału E_z. Zachodzi

$$f(z) = E_z f = \langle f, e_z \rangle = \int_{\partial\Omega} f(\xi)\overline{e_z(\xi)}d\sigma, \quad z \in \Omega$$

Definiujemy *jądro Szegő* wzorem

$$S(z,\xi) = \overline{e_z(\xi)}, \quad z \in \Omega, \quad \xi \in \partial\Omega.$$

Przestrzeń Szegő, Jądro Szegő

Z drugiej strony da się pokazać, że funkcjonał liniowy

$$E_z : f \to Pf(z), \quad f \in H^2(\partial\Omega)$$

jest ograniczony, więc ciągły. Z twierdzenia Riesza o reprezentacji funkcjonałów liniowych i ograniczonych mamy, że istnieje reprezentant $e_z \in H^2(\partial\Omega)$ funkcjonału E_z. Zachodzi

$$f(z) = E_z f = \langle f, e_z \rangle = \int_{\partial\Omega} f(\xi)\overline{e_z(\xi)}d\sigma, \quad z \in \Omega$$

Definiujemy *jądro Szegő* wzorem

$$S(z,\xi) = \overline{e_z(\xi)}, \quad z \in \Omega, \quad \xi \in \partial\Omega.$$

Czyli

$$Pf(z) = \int_{\partial\Omega} S(z,\xi)f(\xi)d\sigma(\xi) \quad z \in \Omega.$$

Przestrzeń Szegő, Jądro Szegő

Teraz niech $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}$ to układ ortonormalny zupełny dla $H^2(\partial\Omega)$ (taki układ istnieje dla obszarów ograniczonych - patrz Szabat, a dla nieograniczonych nie musi). Zdefiniujmy

$$S'(z,\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(z)\overline{\varphi_j(\xi)} \quad z, \xi \in \Omega$$

Przestrzeń Szegő, Jądro Szegő

Teraz niech $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}$ to układ ortonormalny zupełny dla $H^2(\partial\Omega)$ (taki układ istnieje dla obszarów ograniczonych - patrz Szabat, a dla nieograniczonych nie musi). Zdefiniujmy

$$S'(z,\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(z)\overline{\varphi_j(\xi)} \quad z,\xi \in \Omega$$

Można pokazać, że

a) $S'(\cdot,\xi) = Pf(\cdot) \in H^2(\partial\Omega)$ dla pewnego $f \in H^2(\partial\Omega)$ i S' rozszerza się do p.w. do $(\partial\Omega \times \Omega) \cup (\Omega \cup \partial\Omega)$

b) S' reprodukuje funkcje z $H^2(\partial\Omega)$ (co widać odrazu)

c) $S = S'$

Przestrzeń Szegő, Jądro Szegő

Teraz niech $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}$ to układ ortonormalny zupełny dla $H^2(\partial\Omega)$ (taki układ istnieje dla obszarów ograniczonych - patrz Szabat, a dla nieograniczonych nie musi). Zdefiniujmy

$$S'(z,\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(z)\overline{\varphi_j(\xi)} \quad z,\xi \in \Omega$$

Można pokazać, że

a) $S'(\cdot,\xi) = Pf(\cdot) \in H^2(\partial\Omega)$ dla pewnego $f \in H^2(\partial\Omega)$ i S' rozszerza się do p.w. do $(\partial\Omega \times \Omega) \cup (\Omega \cup \partial\Omega)$

b) S' reprodukuje funkcje z $H^2(\partial\Omega)$ (co widać odrazu)

c) $S = S'$

Stąd mamy : Jądro Szegő może być traktowane jako reprezentant funkcjonału $S : f \to \int_{\partial\Omega} f(\xi)S(z,\xi)d\sigma(\xi)$ gdzie $f \in L^2(\partial\Omega)$ na $H^2(\partial\Omega)$.

Przestrzeń Szegő, Jądro Szegő

Z drugiej strony da się pokazać, że funkcjonał liniowy

$$E_z : f \to Pf(z), \quad f \in H^2(\partial\Omega)$$

jest ograniczony, więc ciągły. Z twierdzenia Riesza o reprezentacji funkcjonałów liniowych i ograniczonych mamy, że istnieje reprezentant $e_z \in H^2(\partial\Omega)$ funkcjonału E_z.

Przestrzeń Szegő, Jądro Szegő

Z drugiej strony da się pokazać, że funkcjonał liniowy

$$E_z : f \to Pf(z), \quad f \in H^2(\partial\Omega)$$

jest ograniczony, więc ciągły. Z twierdzenia Riesza o reprezentacji funkcjonałów liniowych i ograniczonych mamy, że istnieje reprezentant $e_z \in H^2(\partial\Omega)$ funkcjonału E_z. Zachodzi

$$f(z) = E_z f = \langle f, e_z \rangle = \int_{\partial\Omega} f(\xi)\overline{e_z(\xi)}d\sigma, \quad z \in \Omega$$

Definiujemy *jądro Szegő* wzorem

$$S(z,\xi) = \overline{e_z(\xi)}, \quad z \in \Omega, \quad \xi \in \partial\Omega.$$

Przestrzeń Szegő, Jądro Szegő

Z drugiej strony da się pokazać, że funkcjonał liniowy

$$E_z : f \to Pf(z), \quad f \in H^2(\partial\Omega)$$

jest ograniczony, więc ciągły. Z twierdzenia Riesza o reprezentacji funkcjonałów liniowych i ograniczonych mamy, że istnieje reprezentant $e_z \in H^2(\partial\Omega)$ funkcjonału E_z. Zachodzi

$$f(z) = E_z f = \langle f, e_z \rangle = \int_{\partial\Omega} f(\xi)\overline{e_z(\xi)} d\sigma, \quad z \in \Omega$$

Definiujemy *jądro Szegő* wzorem

$$S(z,\xi) = \overline{e_z(\xi)}, \quad z \in \Omega, \quad \xi \in \partial\Omega.$$

Czyli

$$Pf(z) = \int_{\partial\Omega} S(z,\xi) f(\xi) d\sigma(\xi) \quad z \in \Omega.$$

Jądro Bergmana i jądro Szegő dla kuli jednostkowej w $\mathbb{C}^n$

Zachodzi

$$S_B(z,\xi) = \frac{(n-1)!}{2\pi^n}\frac{1}{(1-z\cdot\overline{w})^n} \quad , \quad K_B(z,\xi) = \frac{1}{vol(\mathbb{B})}\frac{1}{(1-z\cdot\overline{w})^{n+1}}\; z\in B, \xi\in\partial B$$

Dodatkowo, jądro Bergmana jest dobrze określone na zbiorze $B\times\overline{B}$.

Funkcja definiująca i obszar pseudowypukły

Definicja (Funkcja definująca)

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem. Funkcją definiującą obszaru Ω nazywamy funkcję $\varrho : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ taką, że

(a) $\nabla \varrho \neq 0$ on $\partial\Omega$

(b) $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n : \varrho(x) < 0\}$

(c) $\varrho \in C^j$

Definicja (Obszar pseudwypykły)

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem oraz ϱ jego funkcją definiującą. Mówimy, że Ω jest ściśle pseudowypukły, gdy

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varrho}{\partial z_j \partial \overline{z_k}}(P) w_j \overline{w}_k \geq 0$$

dla $P \in \partial\Omega$ oraz $w \in \mathbb{C}^n$ t.że $\sum_{j=1}^{n} (\partial\varrho/\partial z_j)(P) w_j = 0$.

Miara Feffermana na brzegu

Jak się okazuje, na ze względu na fakt, że całkujemy po brzegu obszaru oraz chcemy za chwilę rozważać biholomorfizmy obszarów (tzn. funkcje holomorficzne razem ze swoją odwrotnością), wygodnie jest rozważać na brzegu specjalną miarę, tzw. miarę Feffermana.

Miara Feffermana na brzegu

$$d\sigma_F = c_n \sqrt[n+1]{-\det\begin{pmatrix} 0 & \rho_{\overline{k}} \\ \rho_j & \rho_{j\overline{k}} \end{pmatrix}_{1\leq j,k\leq n}} \frac{d\sigma_E}{\|d\rho\|},$$

gdzie $\rho_j \equiv \partial\rho/\partial z_j$, $\rho_{\overline{k}} \equiv \partial\rho/\partial\overline{z}_k$, $\rho_{j\overline{k}} \equiv \partial^2\rho/\partial z_j\partial\overline{z}_k$, oraz ρ jest definiującą funkcją dla Ω. Stała c_n jest pewną stałą zależną od obszaru (patrz [F2])

Wyniki z pracy

Rozważmy metryki z pierwszej części seminarium w przypadku wielowymiarowym. Niech

$$\varrho_\Omega(z,w) := \left(1 - \frac{|K(z,w)|}{\sqrt{K(z,z)}\sqrt{K(w,w)}}\right)^{1/2}. \tag{1}$$

$$\varrho_\Omega^S(z,w) := \left(1 - \frac{|S(z,w)|}{\sqrt{S(z,z)}\sqrt{S(w,w)}}\right)^{1/2}. \tag{2}$$

Zdefniujmy

$$HL_\Omega(z,w) = \frac{|K_\Omega(z,w)|^{2n}}{|S_\Omega(z,w)|^{2n+2}} \frac{S_\Omega(z,z)^{n+1}}{K_\Omega(z,z)^n} \frac{S_\Omega(w,w)^{n+1}}{K_\Omega(w,w)^n} \tag{3}$$

Twierdzenie

Jeśli Ω jest obszarem, dla którego $HL_\Omega(z,w) = 1$ dla każdych $z, w \in \Omega$, to Ω jest ϱ-zupełny wtw Ω jest ϱ_Ω^S-zupełny.

Wyniki z pracy

Rozważmy metryki z pierwszej części seminarium w przypadeku wielowymiarowym. Niech $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, oraz $z \in \Omega, \xi \in \mathbb{C}^n$. Definiujemy (dodatnio określoną) metrykę Bergmana

$$F_B(z,\xi) := \left(\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \log K(z,z)}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} \xi_j \overline{\xi}_k \right)^{1/2} \tag{4}$$

oraz metrykę Szegő przez:

$$F_S(z,\xi) := \left(\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \log S(z,z)}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} \xi_j \overline{\xi}_k \right)^{1/2} \tag{5}$$

Twierdzenie

Jeśli Ω jest obszarem, dla którego $\dfrac{\partial^2}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} \ln HL_\Omega(z,z) = 0, i,j = 1,\ldots,n$. to

$$F_B = \frac{n+1}{n} F_S$$

References

S. Bergman *The kernel function and conformal mapping*, A.M.S. Survey Number V, 2^{nd} Edition, (1970)

D. Barrett, L. Lee; On the Szegő metric, *J. Geom. Anal.* 24 (2014), no. 1, 104–117.

Ch. Fefferman; Parabolic invariant theory in complex analysis, *Adv. in Math.* 31 (1979), no. 2, 131–262.

M.Jarnicki, P.Pflug, *Invariant Distances and Metrics in Complex Analysis*, De Gruyter Expositions in Mathematics 9, (2013).

S.G. Krantz, ***Geometric analysis of the Bergman kernel and metric***, (New York [etc.] : Springer), 2013.

P. Wójcicki, S.G. Krantz, ***On an Invariant Distance Induced by the Szegő Kernel***, preprint

B.V. Shabat, *Introduction to Complex Analysis, Part II : Functions of*

I wiele innych...

Dziękuję mojej żonie Kindze i córkom za cierpliowość podczas robienia tej prezentacji !!! ☺

Dziękuję Państwu za uwagę ! ☺